1 Гильбертовы пространства

1.1 Определение и простейшие свойства гильбертова пространства

Определение 1.1. *Полное евклидово (унитарное) бесконечномерное пространство называется Гильбертовым (обычно обозначается H)*

Теорема 1. *Норма согласованная со скалярным произведением существует $\Leftrightarrow$ выполнено равенство $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$*

1.2 Теорема об элементе с наименьшей нормой. Разложение гильбертова пространства в прямую ортогональную сумму подпространств

Определение 1.2. *Множество называется выпуклым, если вместе с любой парой своих точек оно содержит и соединяющий их отрезок*

Теорема 2. *(об элементе с наименьшей нормой)*
Пусть M - замкнутое выпуклое подмножество H, тогда в M существует элемент с наименьшей нормой и он единственен.

Определение 1.3. *Множество всех элементов H ортогональных подмножеству L называется ортогональным дополнением к L (обозначается $L^{\perp}$)*

Теорема 3. *(о разложении Гильбертова пространства в сумму)*
Пусть L - замкнутое линейное подмножество H, тогда справедливо $H = L \oplus L^{\perp}$, т.е. $\forall x \in H\ \exists!\ x_1 \in L, x_2 \in L^{\perp}:\ x = x_1 + x_2$

1.3 Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала

Лемма 1.1. *Пусть $f(x)$ - линейный ограниченный функционал над H и $f \not\equiv 0$, тогда $\dim\left(\ker f\right)^{\perp} = 1$*

Теорема 4. *(Рисса о представлении линейного ограниченного функционала)*
$\forall\ f(x) \in H^*\ \exists!\ h \in H:\ f(x) = (x,h),\ \|f\| = \|h\|$

1.4 Слабая сходимость

Свойства слабо сходящихся последовательностей:

1. $x_n \rightharpoonup x_0,\ \|x_n\| \to \|x_0\| \Rightarrow x_n \to x_0$
2. $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|$
3. (Лемма Кадеца) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \exists\{n_k\}:\ \dfrac{x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}}{k} \to x$

1.5 Полные, замкнутые, ортонормированные системы

Определение 1.4. *Система называется замкнутой в H, если любой элемент из H можно приблизить конечной линейной комбинацией из элементов системы с наперёд заданной точностью.*

Определение 1.5. *Система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется полной, если из $(x,x_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ следует $x = 0$.*

Теорема 5. *В H понятие замкнутости и полноты эквивалентны.*

Теорема 6. *(Рисса-Фишера)*
Пусть $\{e_n\}$ - полная система и пусть задана $\{c_k\} \subset \mathbb{C}:\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 < \infty \Rightarrow \exists!\ x \in H:\ (x,e_k) = c_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = \|x\|^2$

1.6 Процесс ортогонализации

Теорема 7. *В сепарабельном H существует полная ортонормированная система.*

Теорема 8. *Все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны с изоментией между собой.*

2 Пространства Соболева. Обобщённые решения краевых задач

Определение 2.1. *Пространство Соболева: Рассмотрим пространсво $C^1[0,1]$ со скалярным произведением $(u,v)_w = \int\limits_0^1 uvdt + \int\limits_0^1 u'v'dt$ пополним это пространство по норме, тогда получим пространство Соболева $W_2^1(0,1)$.*

Определение 2.2. *Рассмотрим $\|u_n - u_m\|_{W_2^1(0,1)}$ - фундаментальная, тогда Обобщённой производной функции и называется $\lim\limits_{n\to\infty} u_n' = v$*

Лемма 2.1. *Пусть* $u(x) \in C^1[0,1]$, *тогда* $\|u\|_C \leqslant \sqrt{2}\|u\|_{W_2^1(0,1)}$

Теорема 9. *(Вложения)*
Пространство $W_2^1(0,1) \subset C(0,1)$, *причем ограничено* ($\exists M > 0:\ \|u\|_C \leqslant M\|u\|_{W_2^1(0,1)}$)

Теорема 10. *Вложение* $W_2^1(0,1) \subset C(0,1)$ *компактно.*

Следствие 2.1. *Из последовательности, ограниченной в* $W_2^1(0,1) \subset C(0,1)$ *можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в* $L_2[0,1]$.

2.1 Обобщённые решения краевых задач

Пространство $\dot{W}_2^1(0,1)$ - пространство Соболева, но функции дополнительно обращаются в 0 на концах отрезка.
1-ая краевая задача

$$\begin{cases} \big(a(t)u'(t)\big)' - c(t)u(t) = -f(t), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ 0 < a_0 \leqslant a(t) \leqslant a1 < \infty, \\ 0 \leqslant c_0 \leqslant c(t) \leqslant c1 < \infty, \\ f(t) \in L_2(0,1), \\ a(t), b(t) - \text{Ограниченные и измеримые на [0,1]} \end{cases} \tag{2.1}$$

Определение 2.3. *Обобщённым решением первой краевой задачи (2.1) называется функция* $u \in \dot{W}_2^1(0,1)$, *удовлетворяющая тождеству* $\forall v \in \dot{W}_2^1(0,1)$

$$\int_0^1 \big(a(t)u'(t)v'(t) + c(t)u(t)v(t)\big)\,dt = \int\limits_0^1 f(t)v(t)dt$$

Теорема 11. *Обобщённое решение задачи (2.1) существует и единственно*

Лемма 2.2. *(Неравенство Пуанкаре)*
Пусть $u \in \dot{W}_2^1(0,1)$, *тогда* $\int\limits_0^1 u^2 dt \leqslant \int (u')^2 dt$

2-ая краевая задача

$$\begin{cases} \big(a(t)u'(t)\big)' - c(t)u(t) = -f(t), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \\ 0 < a_0 \leqslant a(t) \leqslant a1 < \infty, \\ 0 < c_0 \leqslant c(t) \leqslant c1 < \infty, \\ f(t) \in L_2(0,1), \\ a(t), b(t) - \text{Ограниченные и измеримые на [0,1]} \end{cases} \tag{2.2}$$

Определение 2.4. *Обобщённым решением второй краевой задачи (2.2) называется функция* $u \in W_2^1(0,1)$, *удовлетворяющая тождеству* $\forall v \in W_2^1(0,1)$

$$\int_0^1 \big(a(t)u'(t)v'(t) + c(t)u(t)v(t)\big)\,dt = \int\limits_0^1 f(t)v(t)dt$$

Теорема 12. *Обобщённое решение задачи (2.2) существует и единственно*

2.2 Обобщённое решение краевых задач для уравнений в частных производных

1-ая краевая задача
$D \subset \mathbb{R}^n$ - ограниченная область.

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) - c(x)u(x) = -f(x) \\ u|_{\sigma D} = 0, \\ a_0\|\xi\| \leqslant \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)|\xi_i||\xi_j| \leqslant a_1\|\xi\| \\ 0 < a_0 \leqslant a(x) \leqslant a1 < \infty, \\ 0 \leqslant c_0 \leqslant c(x) \leqslant c1 < \infty, \\ f(x) \in L_2(D), \\ a(x), b(x) - \text{Ограниченные и измеримые на D} \end{cases} \tag{2.3}$$

$\dot{W}_2^1(D)$ - аналогично функции обращаются в 0 на границе.

Определение 2.5. *Обобщённым решением второй краевой задачи (2.3) называется функция* $u \in \dot{W}_2^1(D)$, *удовлетворяющая тождеству* $\forall v \in \dot{W}_2^1(D)$

$$\int_D \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + c(x)u(x)v(x) \right) dx = \int_D f(x)v(x)dx$$

Лемма 2.3. *(Неравенство Пуанкаре)*
$u(x) \in \dot{W}_2^1(D)$, *тогда справедливо* $\int_D u^2(x)dx \leqslant C \int_D (\nabla u)^2 dx$, C *зависит только от области.*

Теорема 13. *Обобщённое решение задачи (2.3) существует и единственно.*

2-ая краевая задача

Все аналогично, только на границе $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\sigma D} = 0$ и $c_0 > 0$.

3 Компактные (вполне непрерывные) операторы в гильбертовом пространстве

3.1 Сопряженный оператор

Определение 3.1. *Оператор B называется сопряжённым к оператору A, если* $\forall x, y \in H: \ (Ax, y) = (x, By)$

Теорема 14. *Пусть A - линейный ограниченный оператор, тогда* $\exists! A^*$ *- линейный и ограниченный и* $\|A\| = \|A^*\|$

3.2 Вполне непрерывные операторы

Определение 3.2. *Оператор A называется вполне непрерывным, если слабосходяющуюся последовательность переводит в сильно сходяющуюся.*

Лемма 3.1. *Пусть A - линейный ограниченный, тогда из* $x_n \rightharpoonup x$ *следует* $Ax_n \rightharpoonup Ax$

Определение 3.3. *Пусть A - вполне непрерывный, тогда* A^* *- вполне непрерывный*

3.3 Компактный оператор

Определение 3.4. *Оператор A называется компактным, если ограниченное множество переводит в предкомпактное.*

Теорема 15. *Оператор A - компактный* $\Leftarrow$ *он вполне непрерывен.*

3.4 Приближение компактных операторов

Теорема 16. *Пусть A - ограниченный,* A_n *- вполне непрерывны и* $\|A_n\| \to \|A\|$, *тогда A - компактный.*

Лемма 3.2. *Пусть A - компактный, тогда* $\exists z \in H : \|z\| = 1$ *и* $\|Az\| = \|A\|$.

Теорема 17. *Пусть* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- ОНБ в сепарабельном H.* $P_n x = \sum\limits_{k=1}^{n} (x, e_k)e_k$. *Пусть A - компактный, тогда* $\|A - P_n A P_n\| \to 0$.

4 Теория Фредгольма для вполне непрерывных операторов

4.1 Третья теорема фредгольма

Будем рассматривать оператор $T = E - A$, где A - вполне непрерывный.

Теорема 18. $\exists a > 0 : \ \|Tx\| \geqslant a\|x\|, \forall x \perp \ker T$

Теорема 19. $R(T)$ *- замкнуто*

Теорема 20. *Пусть B - линейный ограниченный оператор, тогда справедливо разложение* $H = \ker B \oplus \overline{R(B^*)} = \ker B^* \oplus \overline{R(B)}$

Теорема 21. *(III - Фредгольма)*
Уравнение $Tx = y$ *разрешимо* $\Leftrightarrow$ $y \perp \ker T^*$

4.2 Первая теорема Фредгольма

Теорема 22. $def\ T = \dim \ker T < \infty$

Теорема 23. *(о стабилизации ядер)*
$\exists N \in \mathbb{N} : \ker T \subset \ker T^2 \subset \dots \subset \ker T^N = \ker T^{N+1} = \dots$

Теорема 24. *(I - Фредгольма)*
Уравнение $Tx = y$ *разрешимо при* $\forall$ *правой части* $\Leftrightarrow$ $\ker T = \varnothing$

4.3 Вторая теорема Фредгольма

Теорема 25. *(II - Фредгольма)*
$def\ T = def\ T^* < \infty$

4.4 Общее операторное уравнение. Альтернатива Фредгольма

$$(A - \lambda E)x = y,\ \lambda \neq 0 \in \mathbb{C},\ A - \text{вп. непр.}$$

можем переписать в виде

$$(E - \tilde{A})x = \tilde{y},\ \tilde{y} = -y/\lambda,\ \tilde{A} = -A/\lambda$$

Теорема 26. *Уравнение* $(A - \lambda E)x = y$ *разрешимо для любой правой части* $\Leftrightarrow \ker A - \lambda E = \{0\}$

Теорема 27. $def(A - \lambda E) = def(A^* - \overline{\lambda} E) < \infty$

Теорема 28. *Уравнение* $(A - \lambda E)x = y$ *разрешимо* $\Leftrightarrow y \perp \ker A^* - \overline{\lambda} E$.

Теорема 29. *(Альтернатива Фредгольма)*
Либо уравнение $(A - \lambda E)x = y$ *разрешимо для любой правой части, либо* $\ker A - \lambda E \neq \{0\}$

5 Спектральная теория линейный ограниченных операторов

5.1 Спектр оператора

X - банахово.

Определение 5.1. *Точка* $\lambda \in \mathbb{C}$ *называется регулярной точкой оператора* A*, если*

1. $\ker (A - \lambda E) = \{0\}$
2. $R(A - \lambda E) = X$
3. $\exists (A - \lambda E)^{-1}$ *- ограниченный и определённый на всем* X.

Определение 5.2. *Множество регулярных точек оператора* A *обозначаем* $\rho(A)$

Определение 5.3. $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ *- спектр оператора* A.

Теорема 30. *Пусть* A *- ограниченный оператор и* $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$.

Определение 5.4. $R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$ *- резольвента оператора* A.

Теорема 31. *Пусть* A *- ограниченный оператор,* $\lambda \in \rho(A)$*,* $|\Delta| < \dfrac{1}{\|R_A(\lambda)\|} \Rightarrow \lambda + \Delta \in \rho(A)$.

Теорема 32. *(Тождество Гильберта)*
Если A *- ограниченный и* $\lambda, \mu \in \rho(A)$*, то* $R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu) R_A(\lambda) R_A(\mu)$

Теорема 33. H *- гильбертово. Пусть* $A : H \to H$ *- линейный ограниченный оператор, тогда* $\sigma(A) \neq \varnothing$.

5.2 Спектр вполне непрерывного оператора

Определение 5.5. *(Классификация точек спектра)*
Пусть $\lambda \in \sigma(A)$*, тогда*

1. *Если* $\ker (A - \lambda E) \neq \{0\}$*, то* λ *приндалжеит точечному спектру* $\sigma_p(A)$.
2. *Если* $\ker (A - \lambda E) = \{0\}$*,* $R(A - \lambda E) \neq X$*, но* $\overline{R(A - \lambda E)} = X$*, то* λ *принадлежит непрерывному спектру* $\sigma_c(A)$.
3. *Если* $\ker (A - \lambda E) = \{0\}$*,* $R(A - \lambda E) \neq X$ *и* $\overline{R(A - \lambda E)} \neq X$*, то* λ *принадлежит остаточному спектру* $\sigma_r(A)$.

Теорема 34. *Пусть* A *- вполне непрерывный оператор и* $\lambda \neq 0 \in \sigma(A)$*, тогда* $\lambda \in \sigma_p(A)$.

Теорема 35. *Если* $\dim H = \infty$ *и* A *- вполне непрерывный, то* $0 \in \sigma(A)$.

Теорема 36. *Пусть* A *- вполне непрерывный оператор, тогда если в спектре* $\sigma(A)$ *есть последовательность* λ_n*, то* $\lambda_n \to 0$.

5.3 Спектр самосопрожяенного оператора

H - гильбретово. $A : H \to H$ - линейный ограниченный самосопряженный.

Теорема 37. *Пусть* A *- ограниченный самосопряженный оператор, тогда* $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax, x) = \mu$.

Теорема 38. *Ограниченный линейный оператор* A *- самоспряженный* $\Leftrightarrow Im\ (Ax, x) = 0, \forall x \in X$

Теорема 39. *Пусть* A *ограниченный линейный самосопряженный оператор, тогда* $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$

Лемма 5.1. *Собственные вектора* A *отвечающие различным собственным значениям ортгональны.*

5.4 Теорема Гильберта-Шмидта

Пусть H - гильбертово. $A : H \to H$ - линейный вполне непрервный самосопряженный оператор.

Теорема 40. *Пусть* $M = \sup\limits_{\|x\|=1}(Ax, x), -m = \inf\limits_{\|x\|=1}(Ax, x)$*, тогда* $\sigma(A) \subset [-m, M]$*, если* $dim\ H = \infty$*, то* $0 \in [-m, M]$.

Теорема 41. $\exists\lambda$ - *собственное значение* A*:* $\|A\| = |\lambda|$

Теорема 42. *(Гильберта-Шмидта)*
В замыкании образа оператора A содержится полная ортноромированная система собственных векторов, отвечающих $\lambda \neq 0$

5.5 Теорема Гильберта-Шмидта для интегрального оператора

Пусть $Ax(t) = \int_D K(t, s)x(s)ds$ - интегральный оператор.

1. $K(t, s) = \overline{K(s, t)}$
2. D - ограниченная область
3. $\int_D |K(t, s)|^2 ds \leqslant C, \forall t \in D$

Теорема 43. *Если* $y = Ax$*, то ряд по собственным функциям A сходится абсолютно и равномерно в D к функции* $y(t)$.

6 Нелинейные операторы. Теорема Шаудера о неподвижной точке

6.1 Теорема Брауэра о неподвижной точке

Теорема 44. *(Брауэра)*
Любое непрерывное отображение замкнутого шара в себя в конечномерном нормированном пространстве имеет неподвижную точку.